

Bäume

Prof. Dr. Christian Böhm

in Zusammenarbeit mit
Gefei Zhang

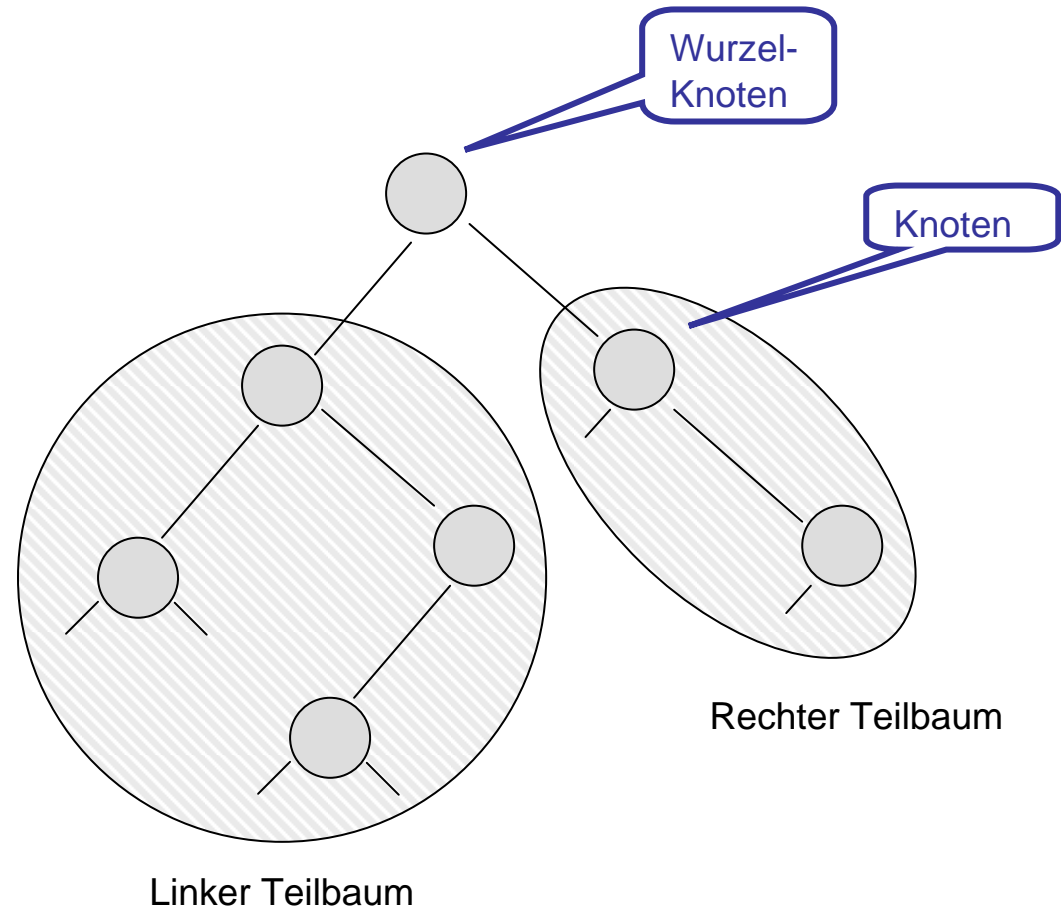
<http://www.dbs.ifi.lmu.de/Lehre/NFInfoSW>

Ziele

- Standardimplementierungen für Bäume kennen lernen

Bäume (abstrakt)

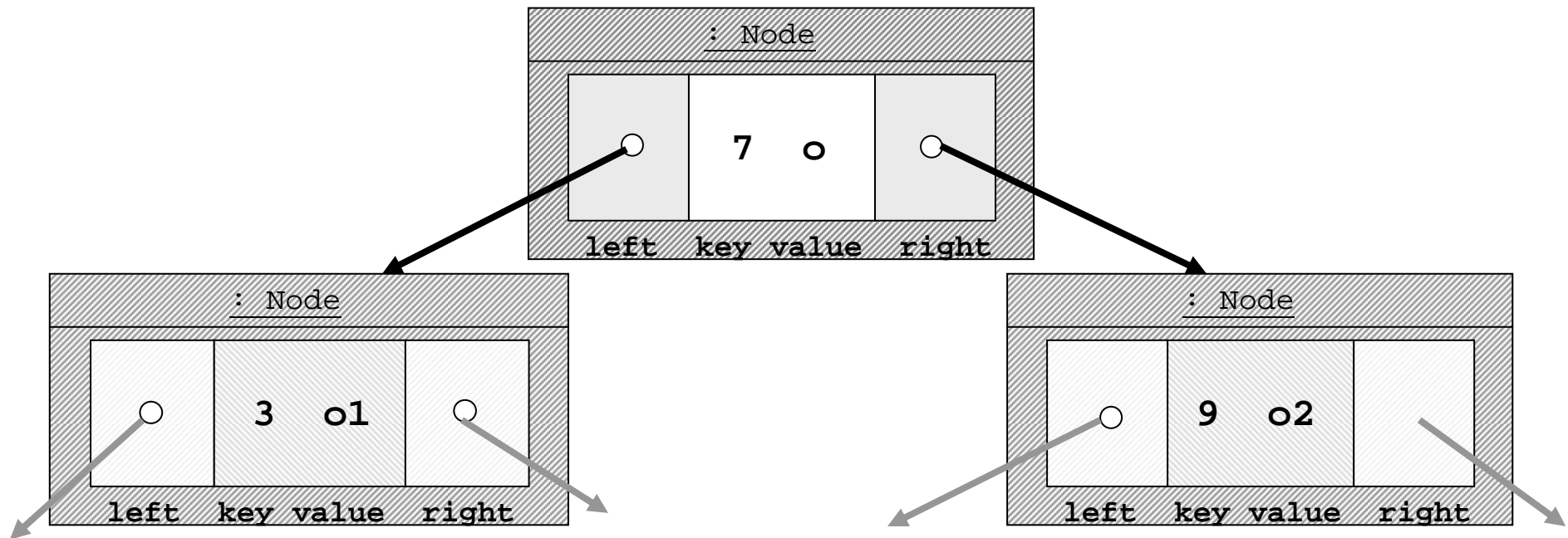
- Bäume sind hierarchische Strukturen.
- Bäume bestehen aus
 - Knoten und
 - Teilbäumen.
- Der oberste Knoten heißt Wurzel.
- Bei **Binärbäumen** hat jeder Knoten zwei Unterbäume:
 - den linken Unterbaum,
 - den rechten Unterbaum.
- In den Knoten kann Information gespeichert werden.



Implementierung von Knoten

```
class Node
{
  Node left;
  int key; Object value
  Node right; ...
}
```

- Ein Knoten wird implementiert als **Objekt mit zwei Zeigern**.
- Außerdem wird in jedem Knoten **ein Schlüssel und ein Wert** gespeichert.



Implementierung von Bäumen

```
public class BinTree
{
    Node anchor; . . .
}
class Node
{
    Node left;
    int key; Object value;
    Node right;

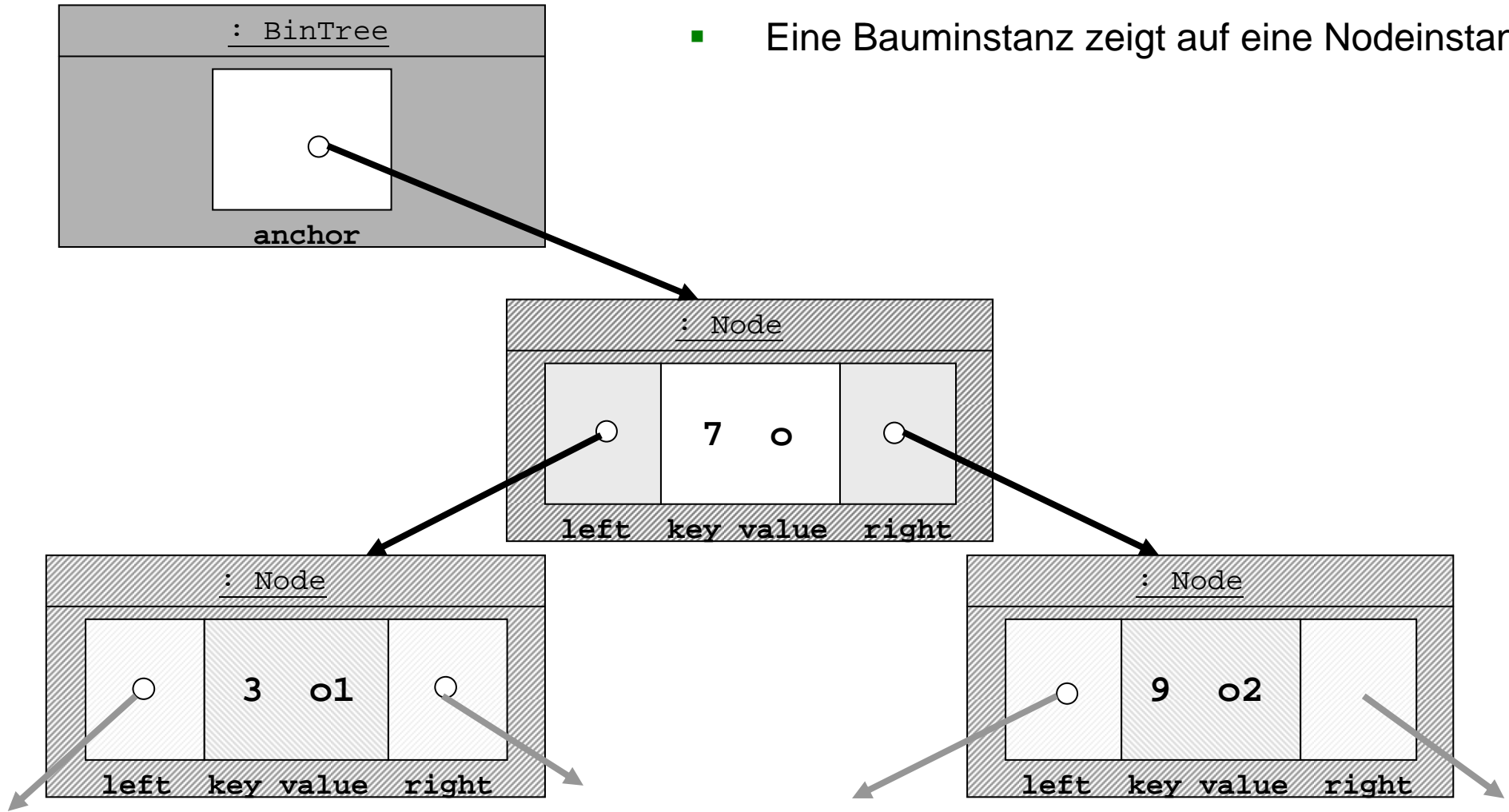
    // Konstruktor
    Node(Node b1, int k, Object o, Node b2)
    { left = b1; key = k; value = o; right = b2;
    }
    . . .
}
```

- Ein Baum wird implementiert durch einen Zeiger auf ein Geflecht von Knoten:
 - Die Klasse BinTree hat wie List einen Anker, der auf Node zeigt.
 - Die Klasse Node ist eine Hilfsklasse für die Klasse BinTree.

```
class BinTree
{
  Node anchor;...
}
```

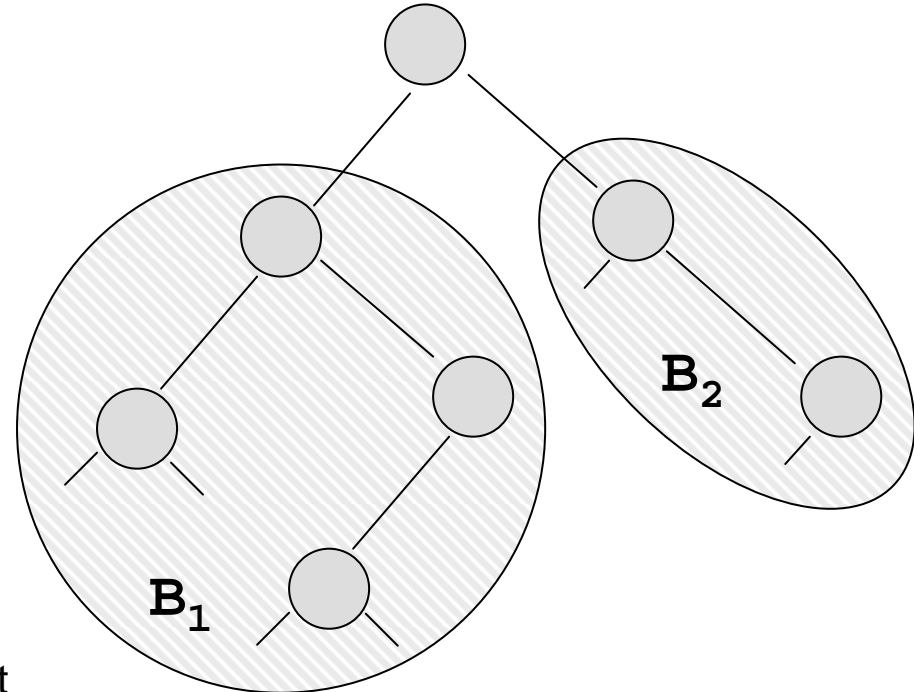
Ein Beispiel für eine Instanz von BinTree

- Eine Bauminstanz zeigt auf eine Nodeinstanz

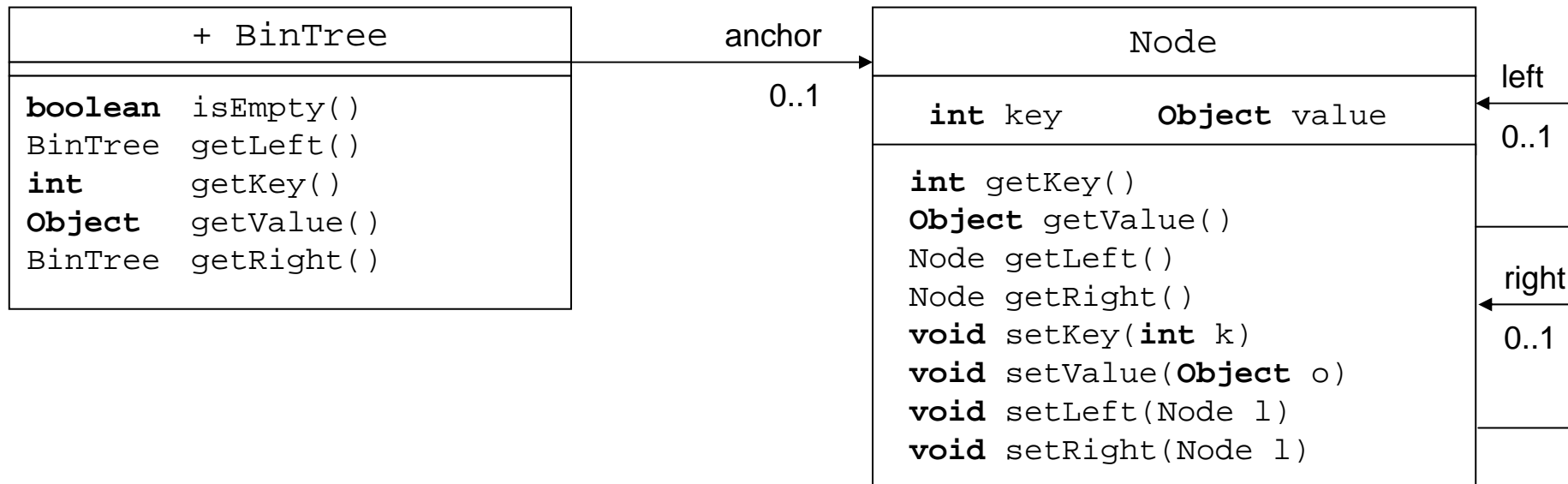


Operationen auf BinTree

- **Konstruktoren**
 - `BinTree()`
 - der leere Baum
 - `BinTree(B_1 , k , o , B_2)`
neuer `BinTree` mit
 - linkem Teilbaum B_1
 - rechtem Teilbaum B_2
 - Inhalt der Wurzel: k, o
- **Prädikat `isEmpty`**
 - Testen, ob ein `BinTree` leer ist
- **Selektoren**
 - Falls der `BinTree` nicht leer ist, liefert
 - `getLeft()` den linken Teilbaum
 - `getRight()` den rechten Teilbaum
 - `getKey()` den Schlüssel der Wurzel
 - `getValue()` den Inhalt der Wurzel



BinTree in UML



Implementierung in Java

Die Implementierung von `BinTree` verläuft analog zu Listen:

- `BinTree` repräsentiert Binärbäume über einem Integer-Schlüssel und Werten vom Typ `Object`.
 - `BinTree` selbst speichert nur einen Verweis auf die Wurzel des Baumes.
 - Die eigentliche Funktionalität wird von der Klasse `Node` realisiert;
- Um Funktionen auf `BinTree` zu definieren, verwenden wir folgende Fallunterscheidung:
 - leerer Baum: Berechnung des Resultats direkt in `BinTree`
 - nicht-leerer Baum: Weitergeben (“delegieren”) der Funktion an `Node`

Implementierung BinTree: isEmpty & Zugriff auf linken Teilbaum

```
public class BinTree
{
    private Node anchor;

    BinTree(); // der leere Baum
    BinTree(BinTree b1, int k, Object o, BinTree b2)
    {
        anchor = new Node(b1.anchor, k, o, b2.anchor);
    }

    boolean isEmpty(){return anchor==null;}

    BinTree getLeft() throws NoSuchElementException
    {
        if (anchor == null) throw new NoSuchElementException();
        else
        {
            BinTree l = new BinTree();
            l.anchor = anchor.getLeft();
            return l;
        }
    }
}

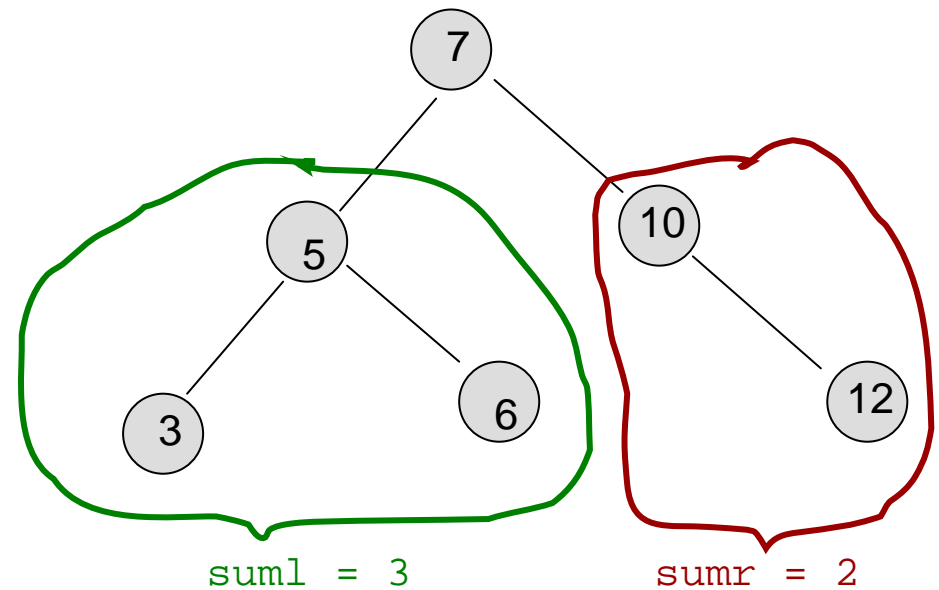
. . .
```

- Implementierung verläuft analog zu Listen

Anzahl der Knoten

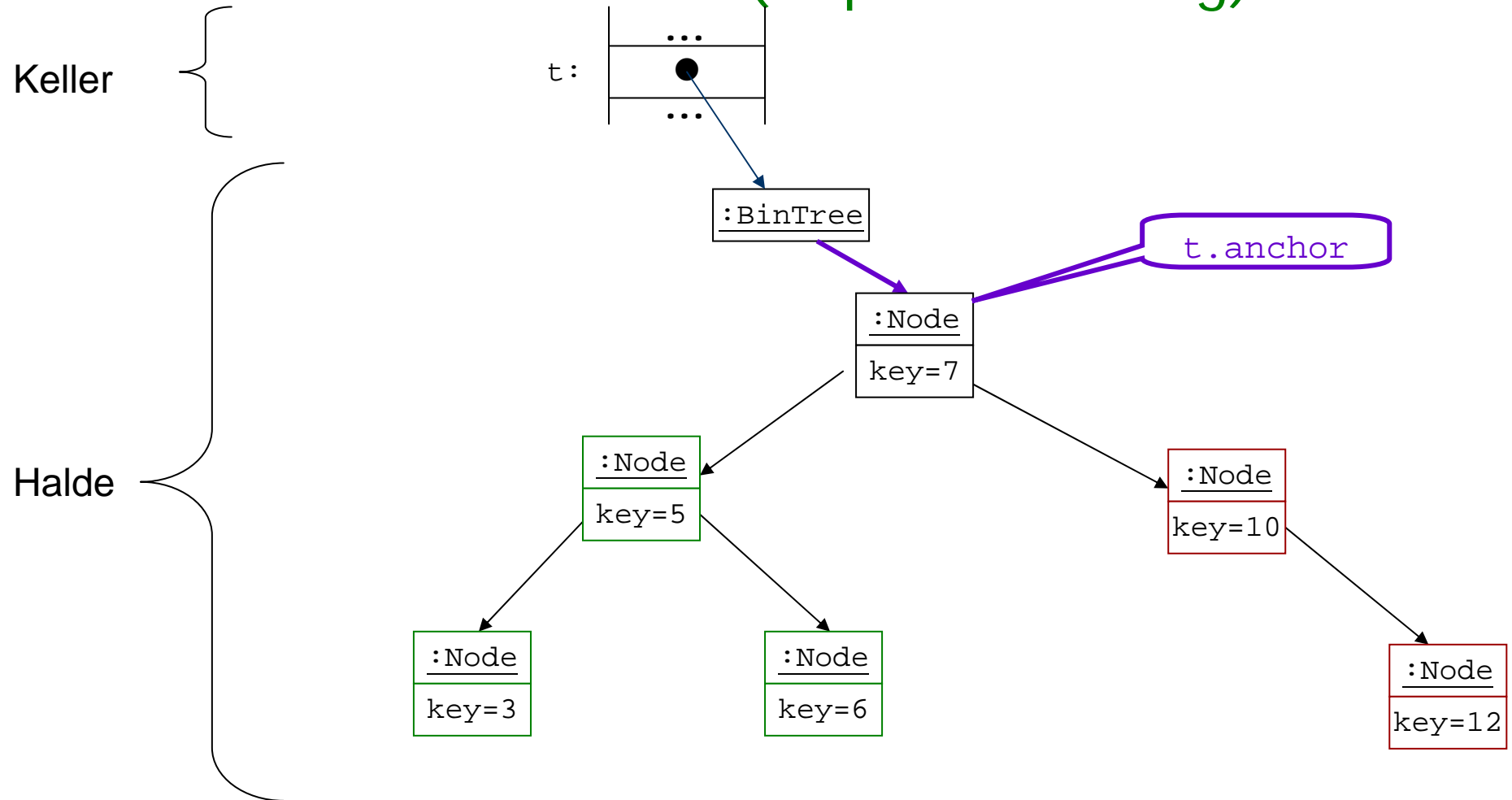
Prinzipieller Ablauf der (rekursiven) Berechnung von `t.sumNodes()`:

1. Berechne die Anzahl der Knoten `suml` des linken Teilbaums;
2. Berechne die Anzahl der Knoten `sumr` des rechten Teilbaums;
3. Gesamtanzahl der Knoten:
 $1 + \text{suml} + \text{sumr}$.



$$\text{Ergebnis} = 1 + \text{suml} + \text{sumr} = 6$$

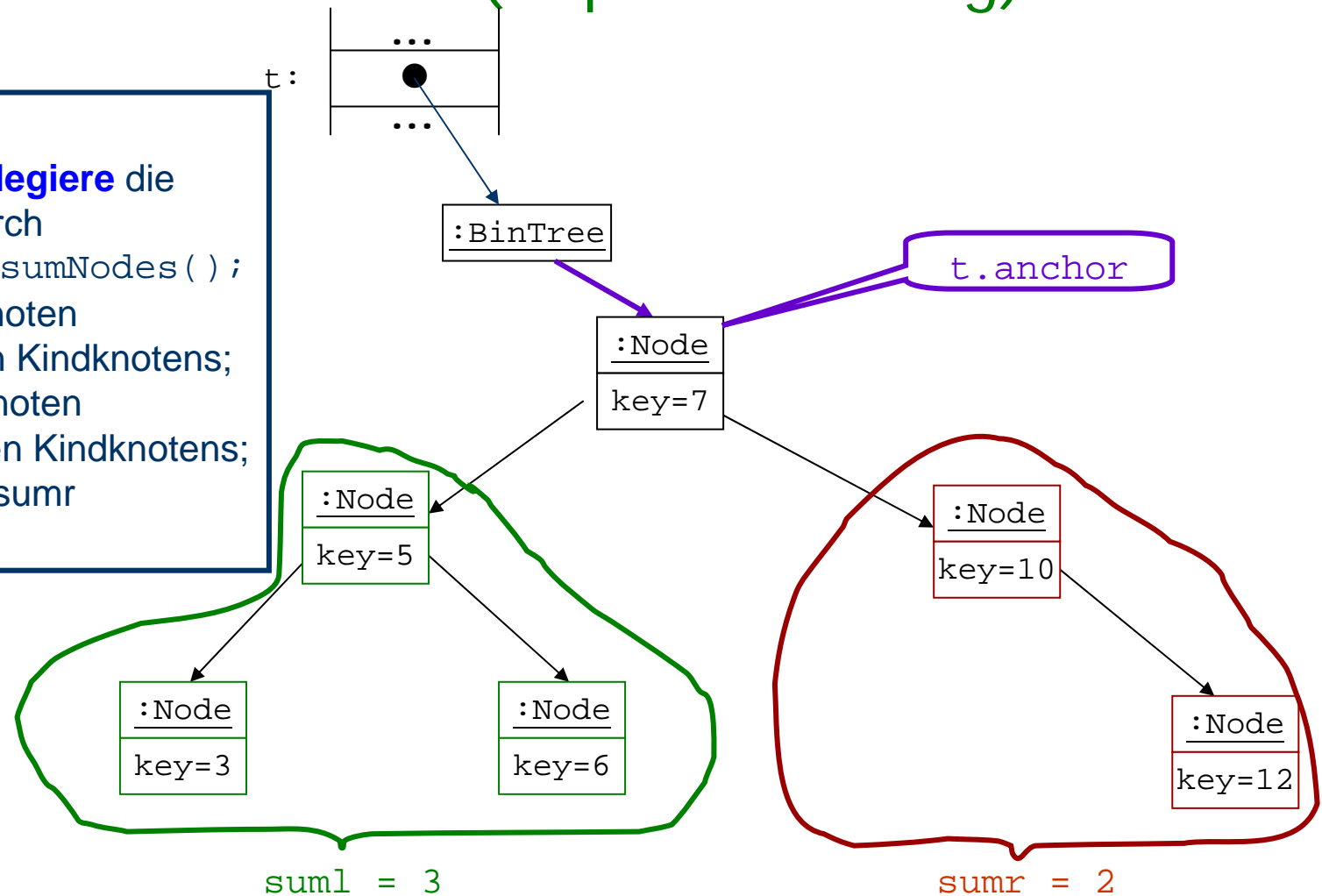
Anzahl der Knoten (Implementierung)



Anzahl der Knoten (Implementierung)

```
t.sumNodes():
```

1. Wenn t nicht leer, **delegiere** die Aufgabe an Node durch Aufruf von `anchor.sumNodes()`;
2. Sei `suml` = Anzahl Knoten des linken Kindknotens;
3. Sei `sumr` = Anzahl Knoten des rechten Kindknotens;
4. Ergebnis: `1 + suml + sumr`



Implementierung BinTree: Anzahl der Knoten

```
public class BinTree
{ . . .
    int sumNodes()
    {
        if (anchor == null) return 0;
        else return anchor.sumNodes();
    }
    . . .
}

class Node
{ . . .
    int sumNodes()
    {
        int suml = 0, sumr = 0;
        if (left != null) suml = left.sumNodes();
        if (right != null) sumr = right.sumNodes();
        return 1 + suml + sumr;
    }
    . . .
}
```

Wenn der Baum leer ist,
gibt es keinen Knoten; d.h.
Anzahl = 0

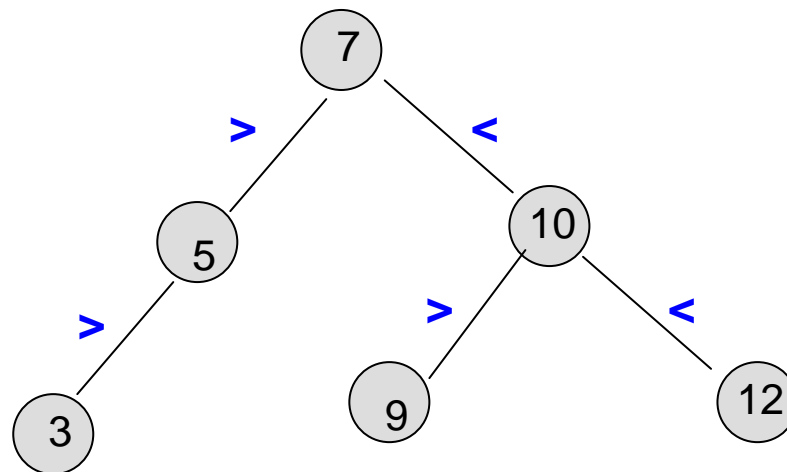
Delegieren der Aufgabe an
sumNodes() (aus der
Klasse Node)

Geordnete Binärbäume

- Ein Binärbaum b heißt **geordnet**, wenn folgendes für alle nichtleeren Teilbäume t von b gilt:

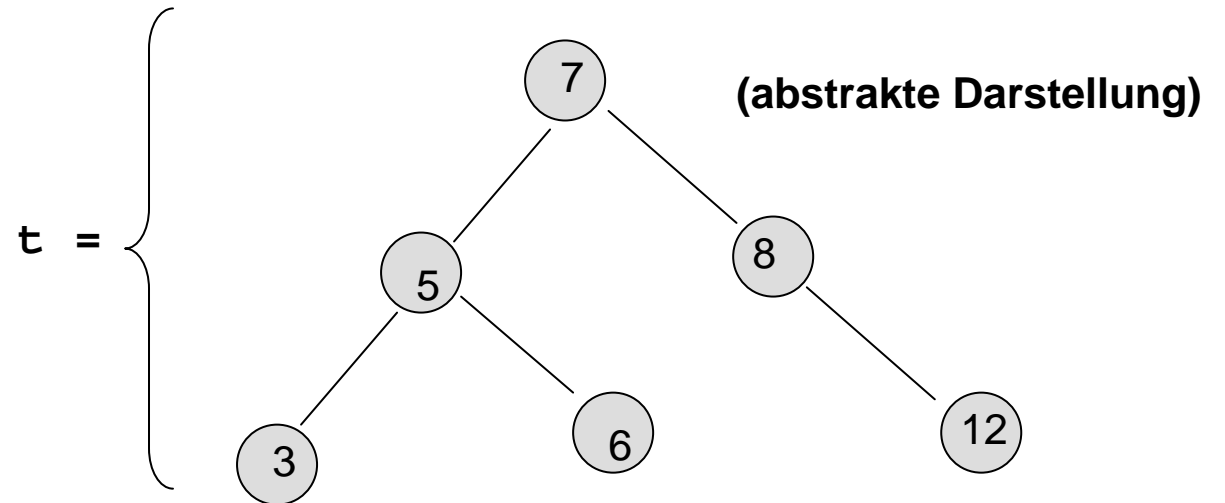
Der Schlüssel von t ist

- größer (oder gleich) als alle Schlüssel des linken Teilbaums von t und
- kleiner (oder gleich) als alle Schlüssel des rechten Teilbaums von t

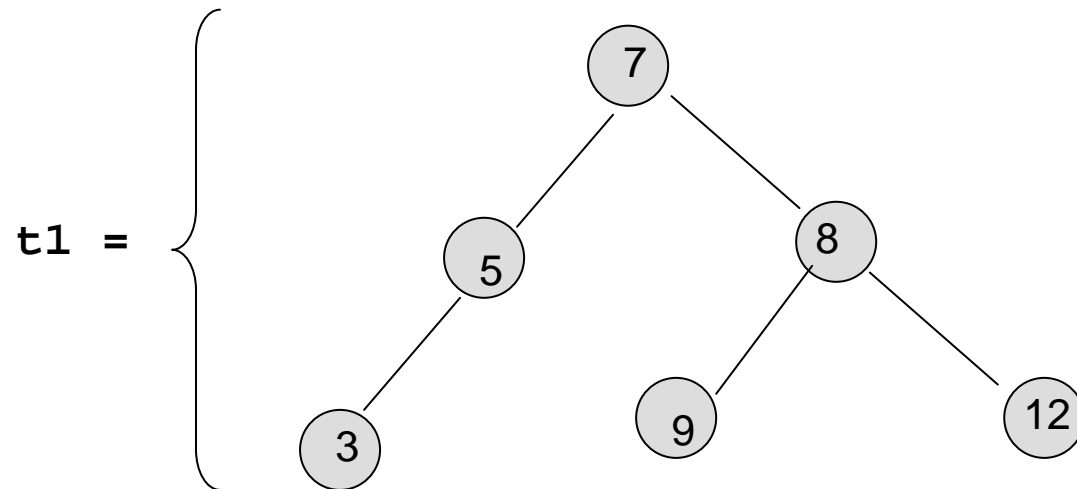


Geordnete Binärbäume

- Beispiel: Geordnet sind:
Der leere Baum und
der Baum t :



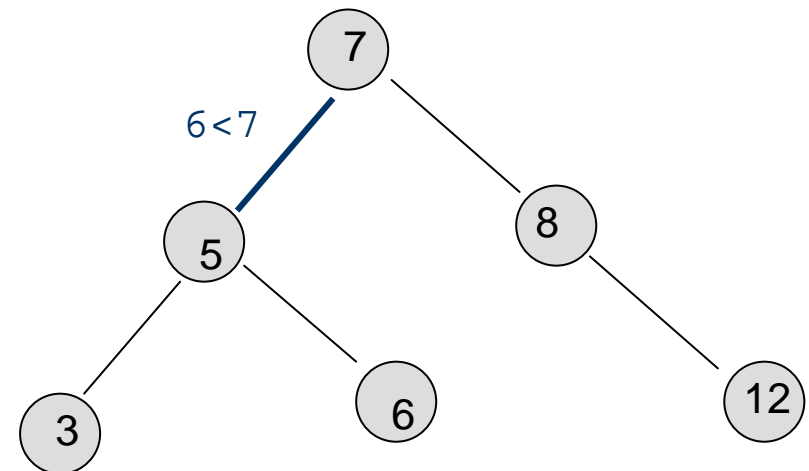
- Nicht geordnet ist
der Baum $t1$:



Suche im geordneten Binärbaum

Prinzipieller Ablauf der Berechnung von `t.find(6)`:

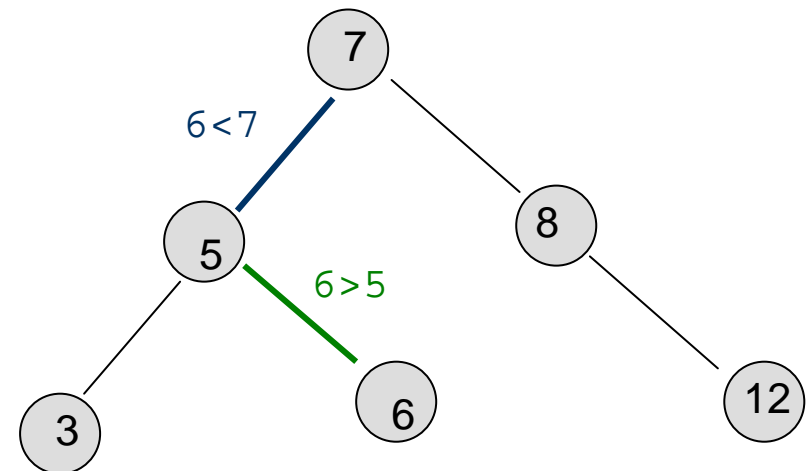
1. Vergleiche 6 mit dem Wert der Wurzel;
2. Da $6 < 7$, gehe zum linken Kindknoten;



Suche im geordneten Binärbaum

Prinzipieller Ablauf der Berechnung von `t.find(6)`:

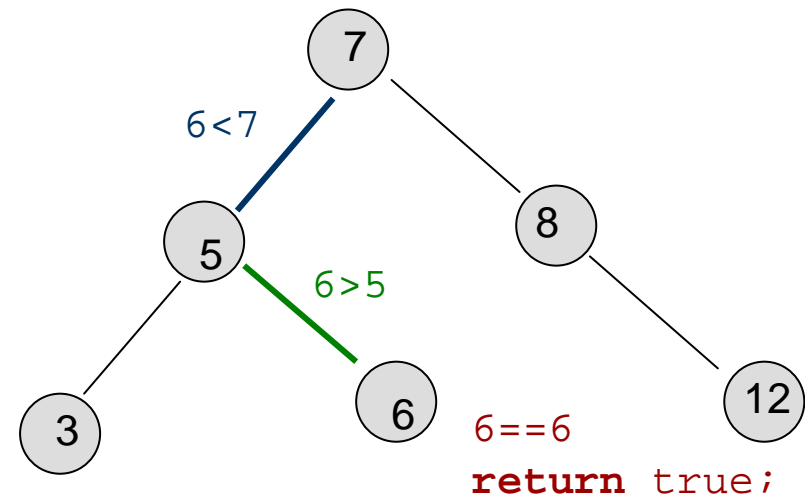
1. Vergleiche 6 mit dem Wert der Wurzel;
2. Da $6 < 7$, gehe zum linken Kindknoten;
3. Vergleiche 6 mit dem Wert dieses Knotens;
4. Da $6 > 5$, gehe zum rechten Kindknoten dieses Knotens;



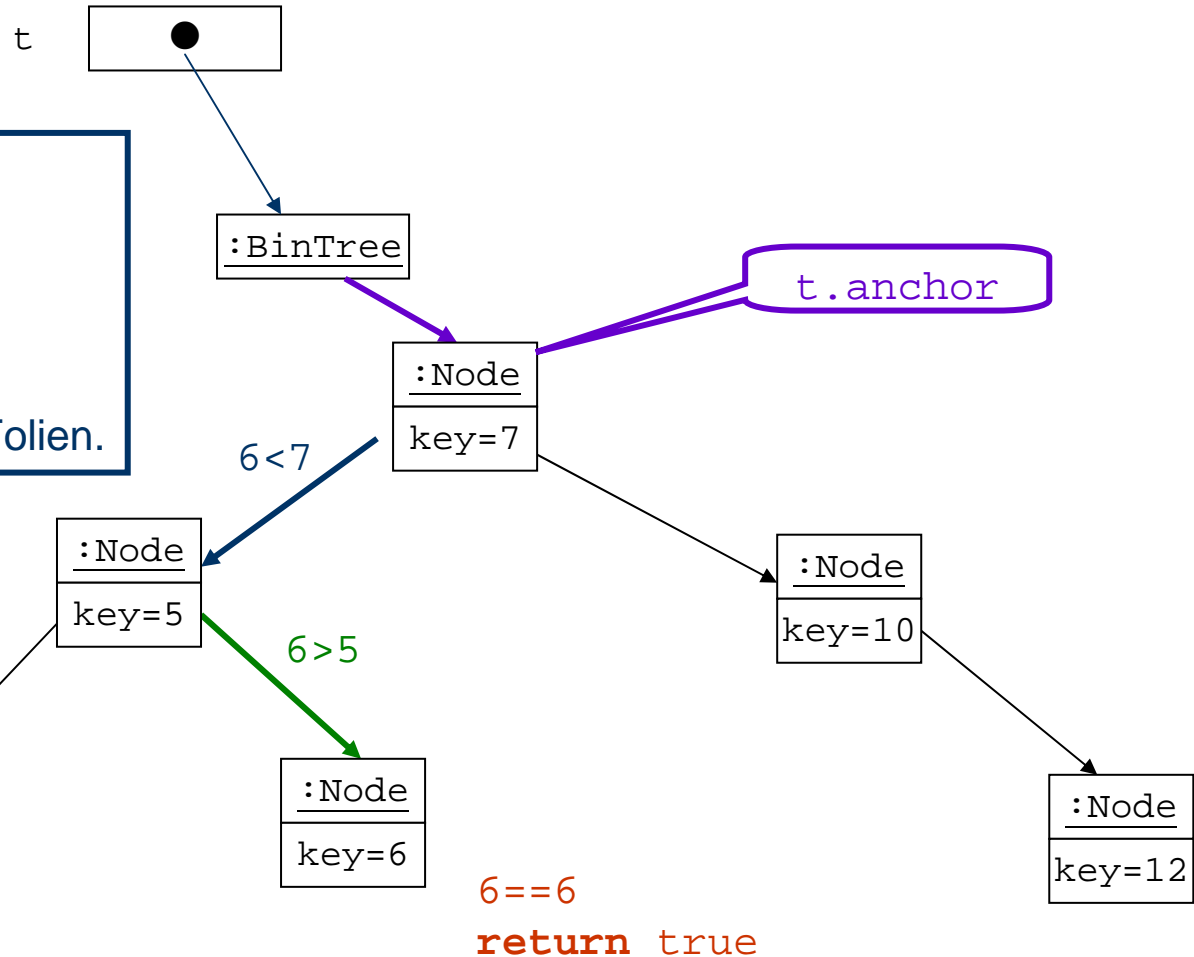
Suche im geordneten Binärbaum

Prinzipieller Ablauf der Berechnung von `t.find(6)`:

1. Vergleiche 6 mit dem Wert der Wurzel;
2. Da $6 < 7$, gehe zum linken Kindknoten;
3. Vergleiche 6 mit dem Wert dieses Knotens;
4. Da $6 > 5$, gehe zum rechten Kindknoten dieses Knotens;
5. Vergleiche 6 mit dem Wert dieses Knotens;
6. Da $6 == 6$, gebe Ergebnis `true` zurück.



Suche im geordneten Binärbaum (Implementierung)



```
t.find(6):
```

1. Suche zunächst in BinTree.
2. Wenn t nicht leer, delegiere die Aufgabe an Node durch Aufruf von `anchor.find(6)`;
3. Verfahre wie auf den vorgehenden Folien.

Suche im geordneten Binärbaum

```
public class BinTree
{ . . .
    public boolean find(int key)
    { if (anchor == null) return false;
      else return anchor.find(key);
    }
    . . .
}
class Node
{ . . .
    boolean find (int key)
    { Node current = this;
      while(current.key != key)           // solange nicht gefunden,
      { if (key < current.key)           // gehe nach links?
        current = current.left;
        else                               // sonst gehe nach rechts
          current = current.right;
        if(current == null) return false; //nicht gefunden!
      }
      return true;                       //gefunden; gib true zurück
    }
}
```

Gibt true zurück, wenn key im Baum; sonst wird false zurückgegeben

Suche im geordneten Binärbaum

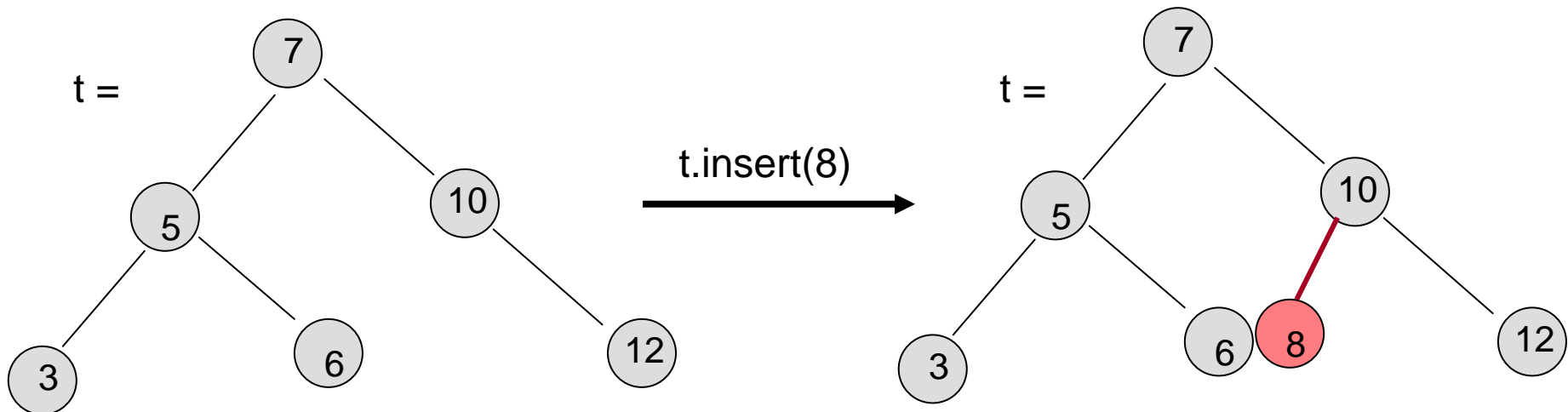
```
public class BinTree
{ . . .
    public Object findValue(int key)
    { if (anchor == null) return null;
      else return anchor.findValue(key);
    }
}
class Node
{ . . .
    Object findValue(int key)
    { Node current = this;
      while(current.key != key)           // solange nicht gefunden,
      { if(key < current.key)             // gehe nach links?
        current = current.left;
        else                               // sonst gehe nach rechts
          current = current.right;
        if(current == null) return null; //nicht gefunden!
      }
      return current.value;               //gefunden; gib value zurück
    }
}
```

Gibt value zurück, wenn key
im Baum; sonst wird null
zurückgegeben

Einfügen in geordneten Binärbaum

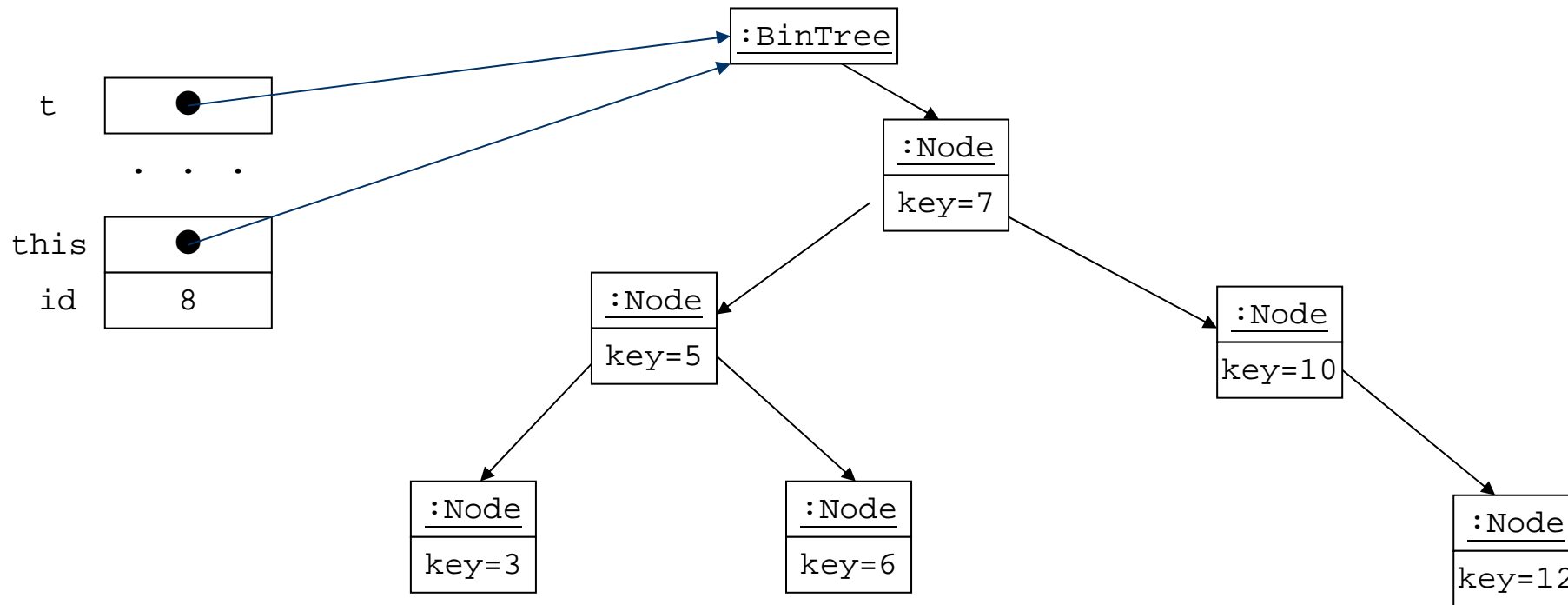
- Beim Einfügen in einen geordneten Binärbaum wird rekursiv die “richtige” Stelle gesucht, so dass wieder eine geordneter Binärbaum entsteht.
- Beispiel: `t.insert(8)` ergibt:

(Zur Vereinfachung der Darstellung wird hier nur ein Schlüssel und kein Wert eingefügt.)



Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

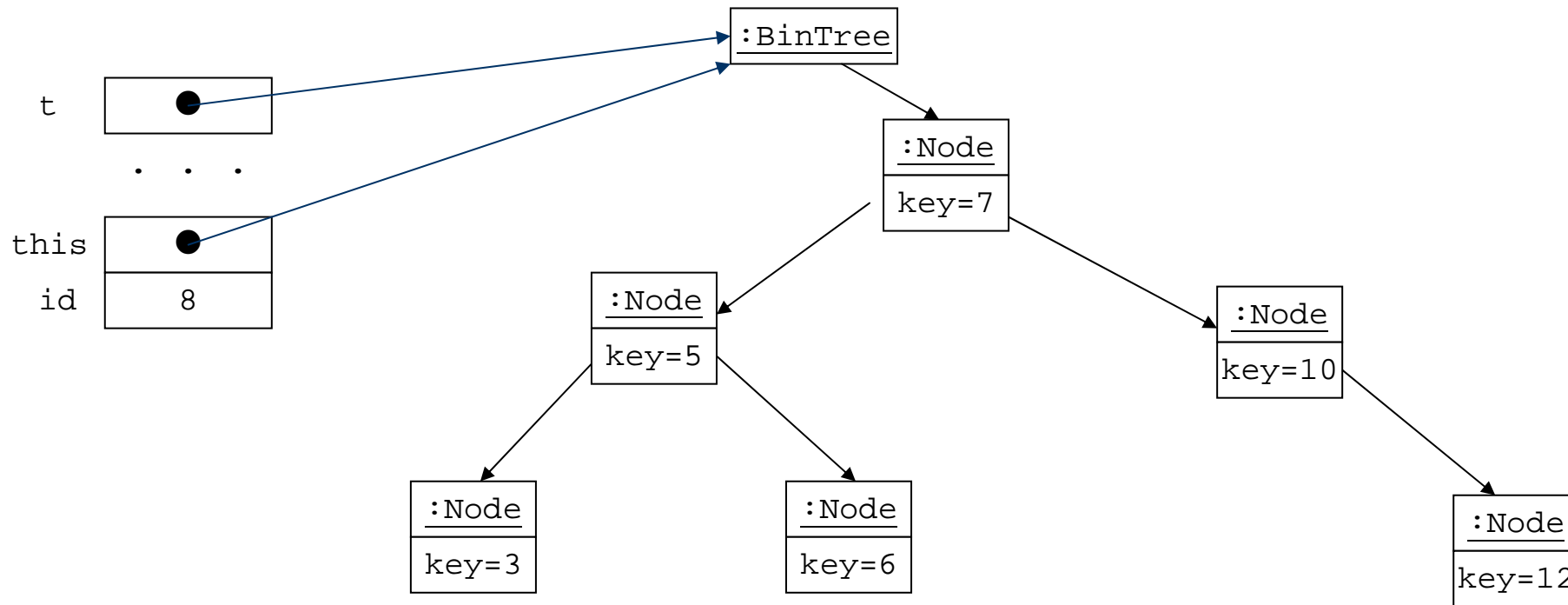
t.insert(8)



Aufruf von `t.insert(id):`

Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

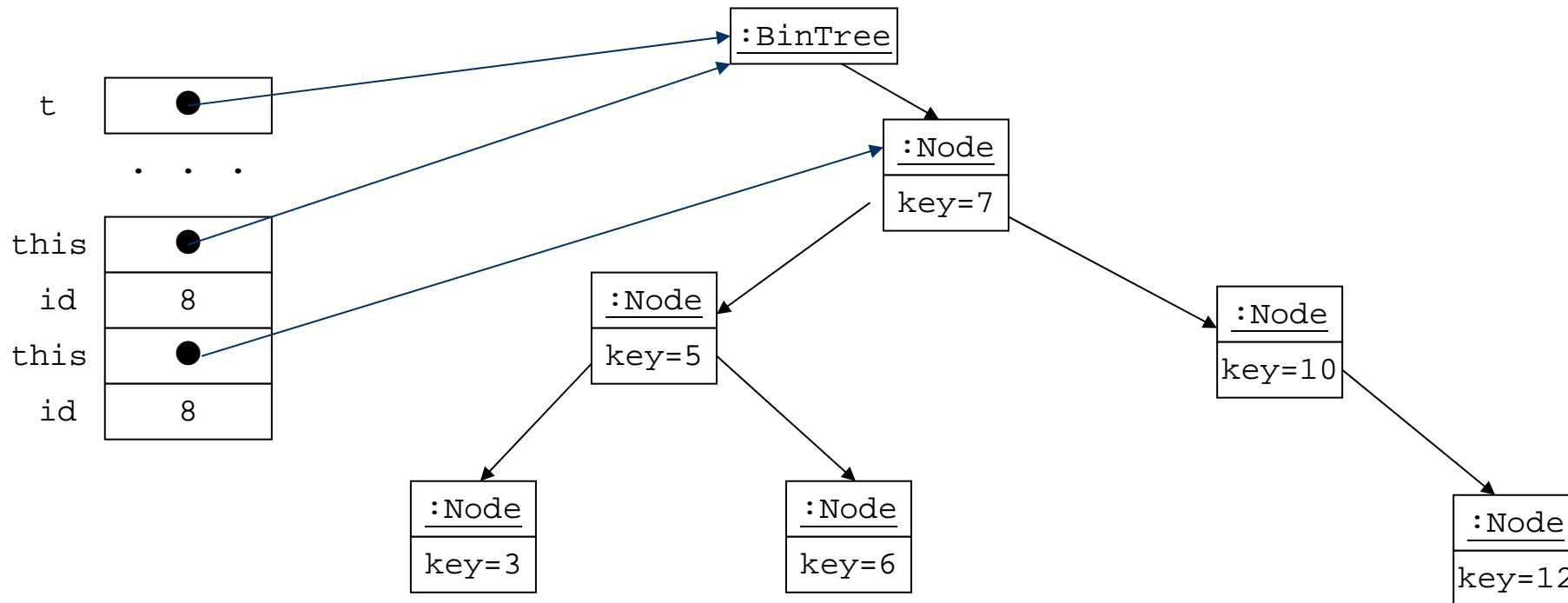
t.insert(8)



Delegieren der Aufgabe durch
Aufruf von `anchor.insert(id):`

Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

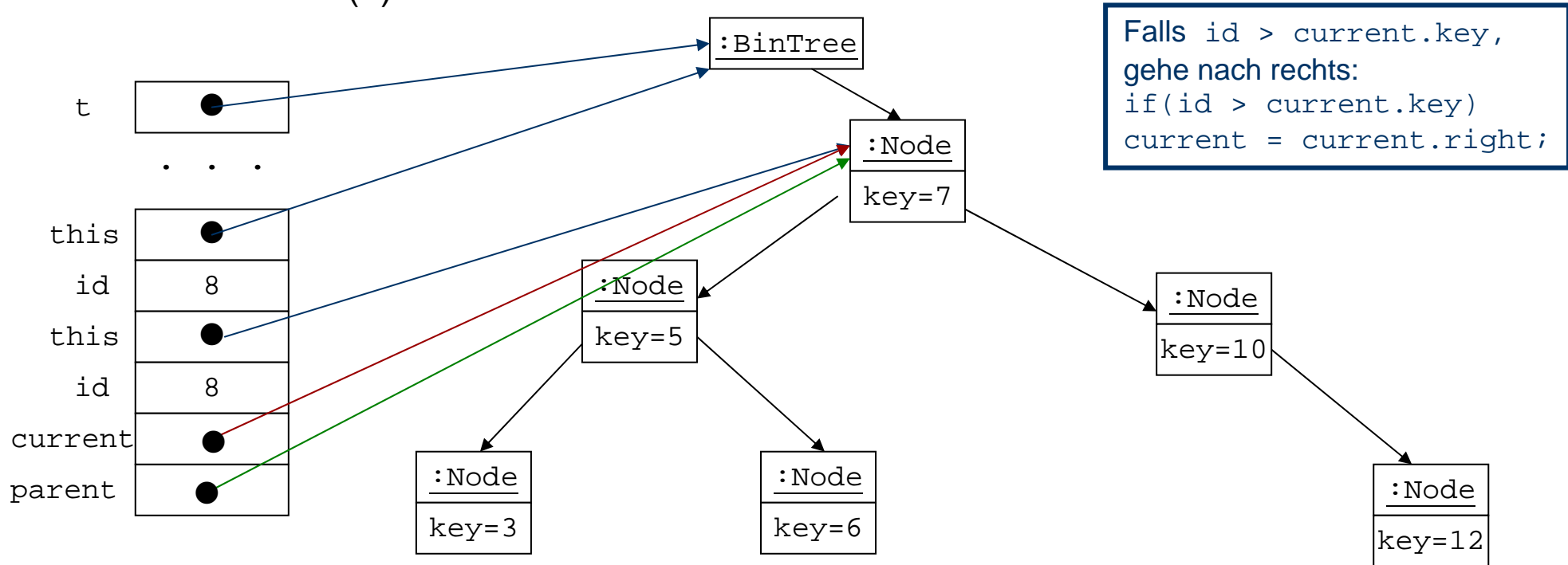
anchor.insertKey(8):



Delegieren der Aufgabe durch
 Aufruf von `anchor.insertKey(id):`
 Durchlauf durch das Node-Geflecht mit
 zwei Hilfsvariablen `current` und `parent`

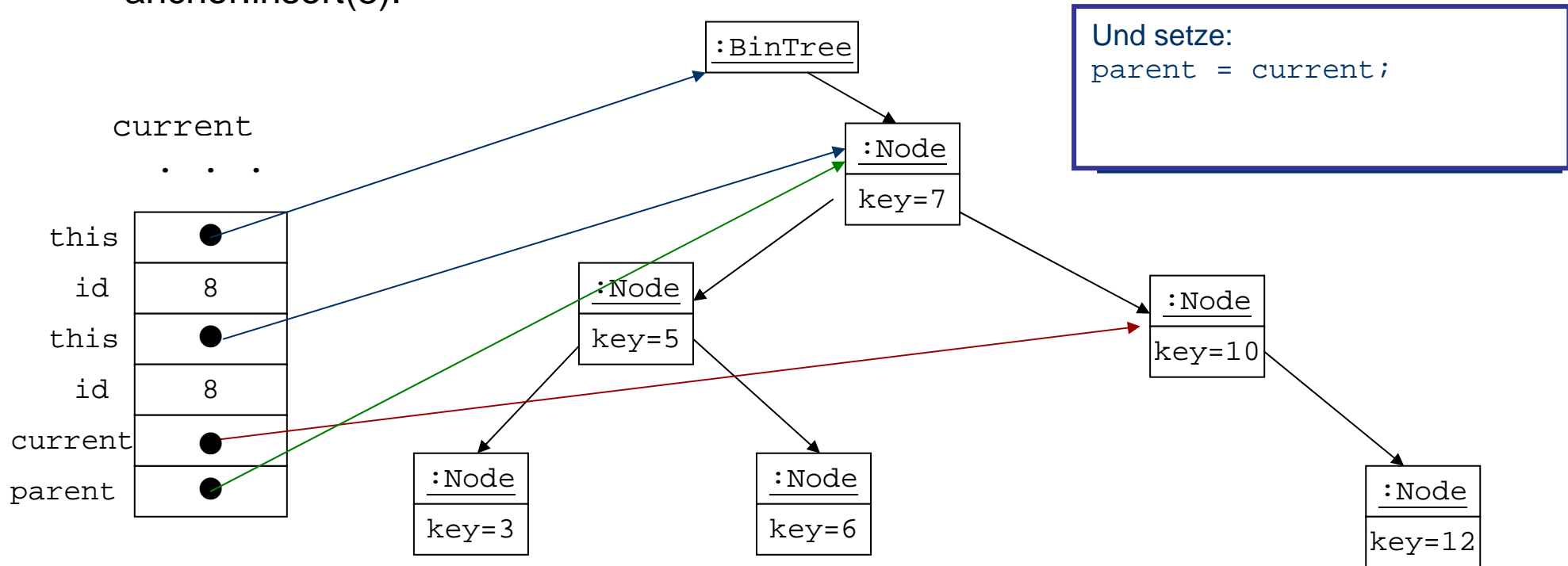
Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

anchor.insert(8):



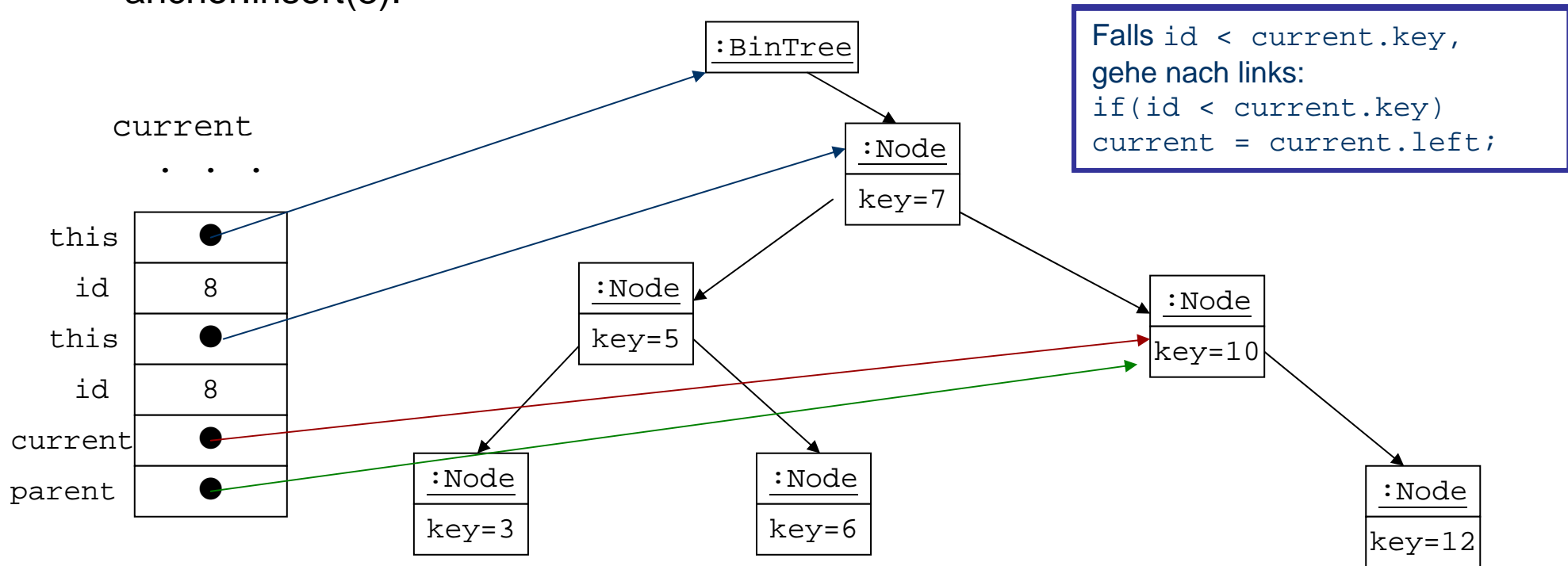
Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

anchor.insert(8):



Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

anchor.insert(8):

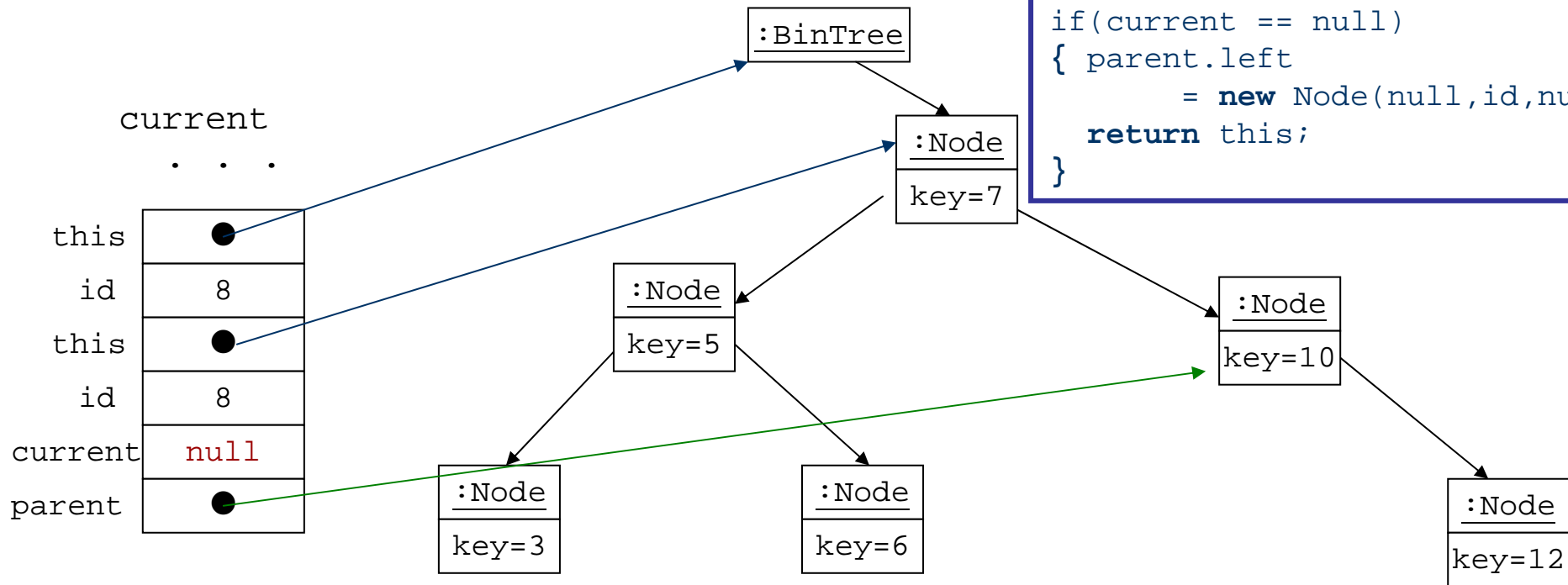


Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

anchor.insert(8):

```

Wenn current= null, füge neuen Knoten ein:
if(current == null)
{ parent.left
  = new Node(null,id,null);
  return this;
}
    
```

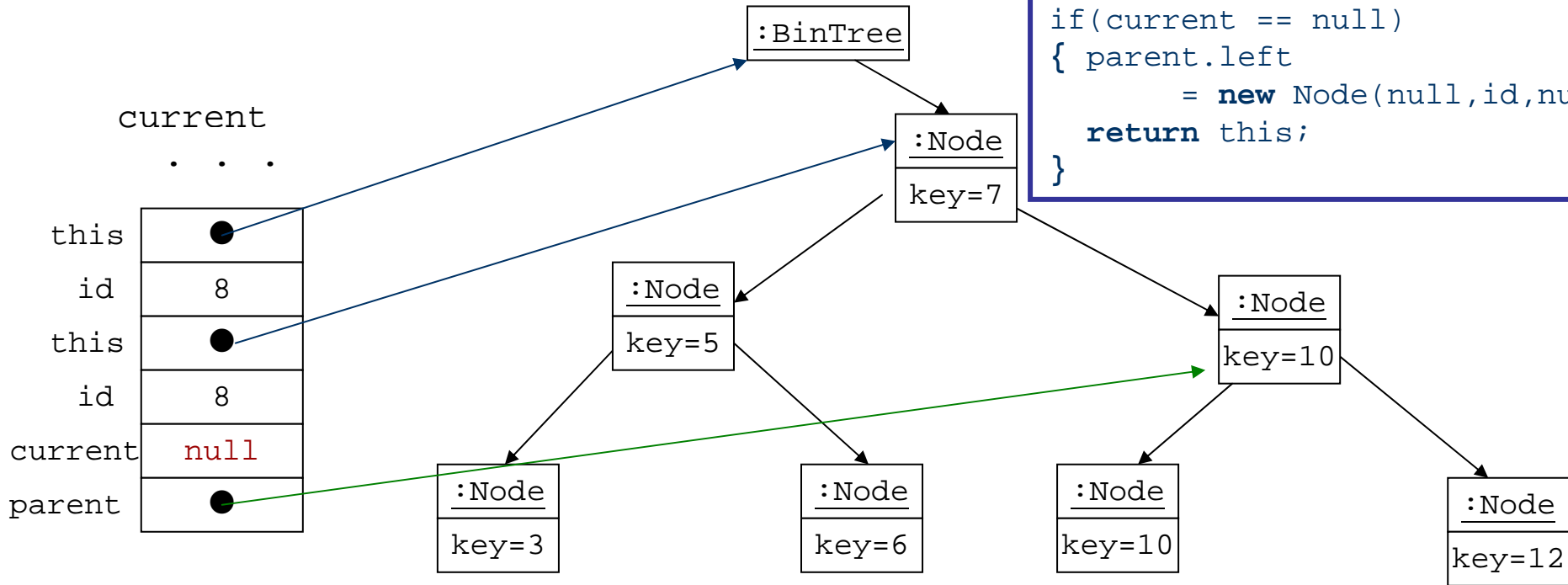


Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

anchor.insert(8):

```

Wenn current= null, füge neuen Knoten ein:
if(current == null)
{ parent.left
  = new Node(null,id,null);
  return this;
}
    
```



Einfügen in geordneten Binärbaum

Fügt einen neuen Knoten mit Schlüssel *id* an der richtigen Stelle im geordneten Baum ein

```
public void insert(int id, Object o)
{   if(anchor==null)           // falls kein Knoten im anchor
    anchor = new Node(null, id, o, null);    // neuer Knoten
    else anchor = anchor.insert(id, o);
}
```

wobei insert in `class Node` folgendermaßen definiert wird:

Einfügen in geordneten Binärbaum (Implementierung)

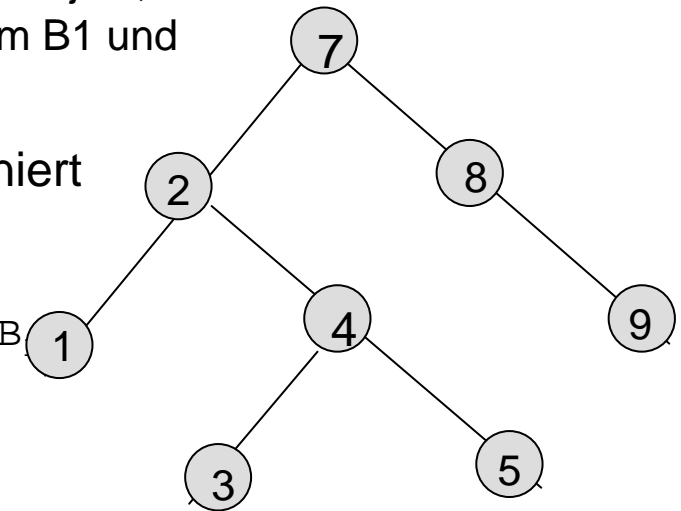
```
Node insert(int id, Object o)
{
    Node current = this;    // starte bei this
    Node parent;
    while(true)            // terminiert intern
    {
        parent = current;
        if(id < current.key) // gehe nach links?
        {
            current = current.left;
            if(current == null) // am Ende füge links ein
            {
                parent.left = new Node(null, id, o, null);
                return this;
            }
        } // end if go left
        else // falls id > current.key, gehe nach rechts
        {
            current = current.right;
            if(current == null) // am Ende füge rechts ein
            {
                parent.right = new Node(null, id, o, null);
                return this;
            }
        } // end else go right
    } // end while
}
```

Fügt einen neuen Knoten passend ein
Achtung: id darf nicht im Baum vorkommen!

Rekursion auf Binärbäumen

- Binärbäume sind induktiv definiert
 - Der Leere Baum ist ein Binärbaum
 - Sind B_1 und B_2 Binärbäume, id ein Schlüssel und o ein Objekt, dann ist der Baum mit Wurzel id und o , linkem Teilbaum B_1 und rechtem Teilbaum B_2 ein Binärbaum

BinTree(B_1, k, o, B_2)



- Operationen f auf Binärbäumen können rekursiv definiert werden

- Falls `isEmpty(B)`: gibt $f(B)$ direkt an
- Ansonsten beschreibe wie sich der Wert von f aus $f(B_1)$, $f(B_2)$ und id, o ergibt.

- Beispiel: `sumNodes1()`

- Falls `isEmpty(B)`: 0
- Ansonsten
`getLeft().sumNodes1()+getRight().sumNodes1()+1`

sumNodes: 8

- Beispiel: `exist(int k)` (ist k vorhanden?)

- Falls `isEmpty(B)`: `false`
- Ansonsten: `getLeft().exists(k)`
`|| getKey()==k || getRight().exists(k)`

Einfache Baumoperationen

```
public class XBinTree extends BinTree
{
    . . .
    public int sumNodes1()
    {
        if(isEmpty()) return 0;
        else return
            ((XBinTree)getLeft()).sumNodes1() +
            ((XBinTree)getRight()).sumNodes1() +1;
    }

    public boolean exists(int k)
    {
        if(isEmpty()) return false;
        else return
            ((XBinTree)getLeft()).exists(k)
            || getKey()==k
            || ((XBinTree)getRight()).exists(k);
    }
    . . .
}
```

- isEmpty(), left(), right() werden aus der Oberklasse geerbt
- left() liefert einen BinTree
- sumNodes1() ist nur in der Unterklasse definiert - für XBinTree
- Wir brauchen casts um die BinTrees in XBinTreeS zu verwandeln

Zusammenfassung

- Binäre Bäume werden in Java implementiert:
 - als Verallgemeinerung der einfach verketteten Listen mit zwei Nachfolgerverweisen
- Eine Operation auf binären Bäume mit Knoten wird definiert:
 - durch Weitergeben der Operation an die Knotenklasse **oder**
 - durch Fallunterscheidung bzgl. des leeren Baums und rekursiven Aufruf der Selektoren `getLeft()` und `getRight()` von `BinTree`.